B.Com-III   Paper-VIII - Business statistics & Elementry Mathematics   By, Sujeet Kr. Suman
R.N.C.

क्रमचय (Permutation)

निश्चित वस्तुओं (या संकेताक्षरों) को एक निर्धारित क्रम में विन्यास, उन वस्तुओं (या संकेताक्षरों) का क्रमचय कहलाता है, दूसरे शब्दों में, किसी निर्दिष्ट वस्तु समूह से एक समय में कुछ या सभी वस्तुएँ लेकर उनके जितने विभिन्न क्रमित विन्यास बन सकते हैं, उनमें से प्रत्येक क्रमचय कहलाता है।

(An ordered arrangement of definite things (or symbols) is called a permutation of those things (or symbols). (other words," The different ordered arrangement that can be made with a number of things taking some or all of them at a time are called their permutations.)

⇒ (1) पंक्ति क्रमचय (2.) वृत्तीय क्रमचय

Note:- 1 से n तक के पूर्णांकों का गुणनफल $1\times2\times3\times\ldots\times n$ या $n\times(n-1)\ldots3\times2\times1$ को $\lfloor n$ या $n!$ लिखा जाता है।

[n को 'क्रम-गुणित' n' (Factorial 'n') पढ़ा जाता है।

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n(n-1)\,[(n-2)\ldots3.2.1] = n(n-1)!$

$= n[(n-1)(n-2)\ldots3.2.1] = n(n-1)(n-2)!$ आदि।

उदाहरणार्थ – यदि 3 विभिन्न अंकों 1, 2, 3, में कोई 2 अंक लेकर दो-दो अंकों की संख्याएँ बनायी जायें तो पहला (दहाई का) स्थान 3 प्रकार से भरा जा सकता है तथा दूसरा (इकाई का) स्थान 2 प्रकार से भरा जा सकता है अतः कुल प्रकार कितने होंगे,

Total Type $= 3\times2 = 6$

वृत्त चित्र के रूप में

First	Second	Number
1	2	12
	3	13
2	1	21
	3	23
3	1	31
	2	32

(P.T.O)

इस प्रकार हम देखते हैं कि अंक 1 व 2 लेने से दो विभिन्न संख्याएँ 12 व 21 बनती है। अर्थात् 1 व 2 का क्रम बदलने से संख्या बदल जाती है। इस प्रकार के जोड़ों को ही क्रमचय कहा जाता है,

* गुणा का आधारभूत नियम

यदि एक संक्रिया n_1 प्रकार से की जा सकती है तथा जब वह संक्रिया किसी एक प्रकार से हो चुकी हो, दूसरी प्रक्रिया n_2 प्रकार से की जा सकती है और इन दोनों के किसी एक प्रकार से हो चुकने के बाद तीसरी संक्रिया n_3 प्रकार से की जा सकती है तथा इसी प्रकार r संक्रियाओं तक, तब r संक्रियाओं को एक साथ $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ प्रकार से किया जा सकता है। इस नियम को गुणा का आधारभूत नियम कहा जाता है।

उदाहरणार्थ – तीन (3) विवाहित जोड़ों में प्रत्येक एक-एक साथी को लेकर तीन व्यक्तियों की समिति निम्न प्रकार से बनायी जा सकती है:

⇒ माना कि पहला जोड़ा M_1, F_1 है तथा दूसरा जोड़ा M_2, F_2 है, तीसरा जोड़ा $M_3 F_3$ है।

पहली संक्रिया – पहले जोड़े में से M_1 या F_1 लिया जा सकता है अर्थात् इनमें से चयन दो प्रकार से किया जा सकता है।

दूसरी संक्रिया – दूसरे जोड़े में से M_2 या F_2 लिया जा सकता है अर्थात् इनमें से चयन दो प्रकार से किया जा सकता है।

तीसरी संक्रिया – तीसरे जोड़े में से M_3 या F_3 लिया जा सकता है। अर्थात इनमें से चयन दो प्रकार से किया जा सकता है।

अतः तीनों संक्रियाओं को एक साथ $2 \times 2 \times 2 = 8$ प्रकार से किया जा सकता है।

टिप्पणी → गुणा के आधारभूत नियमों में घटनाओं या संक्रियाओं के क्रम का ध्यान रखा जाता है।

* n असमान वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुएँ लेने पर क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना

n असमान वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुएँ $(r \leq n)$ लेने पर क्रमचयों की संख्या

(a.) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r-1)$ होती है यदि चयन बिना प्रतिस्थापन (Replacement) के किया गया हो।

(b.) $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^r$ होती है यदि चयन प्रतिस्थापन सहित किया गया हो।

Note → n वस्तुओं में से r वस्तुएँ दो प्रकार से चयनित किये जा सकते हैं –

(a.) बिना प्रतिस्थापन (Replacement) के चयन (without)

(b.) प्रतिस्थापन सहित चयन (selection with Replacement)

Examples:

(1.) Find the value of.

$^7P_3$

2) सूत्र से, $\boxed{{}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$

$$\therefore {}^7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times 5\times 6\times 7}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}}$$

$$= 5 \times 6 \times 7 = 210$$ Ans

(2.) Product शब्द के अक्षरों से तीन-तीन अक्षरों के कितने विभिन्न शब्द बन सकते हैं।

⇒ Product शब्द में 7 असमान अक्षर है। इनमें से कोई तीन अक्षर एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या

$$= {}^7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7\times 6\times 5$$

$$= 210$$ Ans

Scanned with CamScanner

(3.) बिना प्रतिस्थापन के अंकों 1, 3, 5, 7 तथा 9 से 3 अंकों की कितनी संख्याएँ बन सकती हैं,

=) असमान अंकों (वस्तुओं) की संख्या = 5

चयन किये जाने वाले अंकों की सं० = 3

∴ अभीष्ट संख्या $= {}^5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$

$\Rightarrow \frac{5\times3\times4\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{\cancel{2}\times\cancel{1}}$

$= 5\times3\times4 = 60$ है

(4.) यदि ${}^nP_5 = 20\times{}^nP_3$ हो तो n ज्ञात करो।

=) हमें मालूम है कि ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$\therefore {}^nP_5 = 20\times{}^nP_3$ है

$\Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 20\times\frac{n!}{(n-3)!}$

$\Rightarrow \cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}(n-3)(n-4) = 20\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}$

$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 20$

$\Rightarrow n^2-7n+12 = 20$

$\Rightarrow n^2-7n = 20-12$

$\Rightarrow n^2-7n-8 = 0$

$\Rightarrow n^2-8n+n-8 = 0$

$\Rightarrow n(n-8)+1(n-8) = 0$

$\Rightarrow (n-8)(n+1) = 0$

$\therefore (n-8) = 0$

अर्थात् $n = 8$

($n = -1$ निरस्त हो जाता है क्योंकि यहाँ n धन पूर्णांक लिया जाता है)

— o —